ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1984

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Nota : Respecter strictement la numérotation des parties et des questions, ainsi que les notations.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{L}(E)$ l'anneau des endomorphismes de E muni de l'addition et de la composition des applications.

1/ — Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$.

a) - Montrer que, si $f \circ g = g \circ f$, tout sous-espace propre de f est stable par g .

b) - Réciproquement, montrer que si E est somme de sous-espaces propres pour f tels que chacun d'eux soit stable par g, alors $g \circ f = f \circ g$.

2/ — On suppose que f et g ont chacun n valeurs propres distinctes. Montrer l'équivalence des deux conditions :

a) - $f \circ g = g \circ f$;

b) - f et g ont mêmes vecteurs propres.

3/ — On suppose que $f \circ g = g \circ f$, mais on ne fait aucune hypothèse sur les valeurs propres de f ni sur celles de g .

Montrer par récurrence sur $n = \dim E$ qu'il existe un vecteur propre commun à f et g .

(On considérera un sous-espace propre U_λ relatif à la valeur propre λ de f ; on utilisera les restrictions de f et g à U_λ et on distinguera les deux cas : $\dim U_\lambda < \dim E$, puis $\dim U_\lambda = \dim E$).

4/ — Soient x et y deux vecteurs propres non nuls de f associés respectivement à deux valeurs propres distinctes λ et μ et soient a et b deux éléments de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

a) - Montrer que $ax + by$ n'est pas vecteur propre de f. En déduire que si tout vecteur de E est vecteur propre de f, alors $f = \lambda Id_E = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

b) - Montrer que si f est tel que, $\forall g \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ g = g \circ f$, alors $f = \lambda I$.

(On pourra utiliser la projection g de E sur le sous-espace de E engendré par $x \in E$, $x \neq 0$).

5/ — On dit que l'endomorphisme f de E est semi-simple si tout sous-espace de E stable par f possède un supplémentaire stable par f.

Montrer que si f est semi-simple et nilpotent, alors $f = 0$ (f est nilpotent d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ si $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$; on pourra utiliser Ker f comme sous-espace stable par f et un supplémentaire S de Ker f stable par f).

6/ — On suppose maintenant que E est de dimension $n = 3$ sur $\mathbb{R}$; f et g sont les deux endomorphismes dont les matrices, dans la base canonique, sont respectivement :

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vérifier que f et g commutent et trouver un vecteur propre commun aux deux endomorphismes.

7/ — Soit f et g deux endomorphismes quelconques de E.

a) - Montrer que gof a une valeur propre nulle si et seulement si fog a une valeur propre nulle.

b) - Trouver une condition nécessaire et suffisante sur l'ensemble des valeurs propres de f pour qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $I - \alpha f$ ne soit pas inversible, avec $I = Id_E$.

8/ — f et g sont deux endomorphismes de E tels que $I - fog$ soit inversible, $I = Id_E$.

a) - $u = I - gof$ et $v = I + go(I - fog)^{-1} of$; montrer que $uov = vou = I$ et que, par suite, $I - gof$ est inversible.

b) - en déduire que fog et gof ont les mêmes valeurs propres.

9/ — Soit $g \in \mathcal{L}(E)$, donné. Soit φ_g l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ f \longmapsto \varphi_g(f) = gof.$$

Soit λ une valeur propre de g et d la dimension du sous-espace propre U_λ associé à λ .

Montrer que λ est valeur propre de φ_g et caractériser les vecteurs propres de φ_g associés à λ .

Quelle est, en fonction de n et de d, la dimension du sous-espace propre de $\mathcal{L}(E)$ associé à λ ?

10/ — a) - Montrer que si g est diagonalisable, alors φ_g est aussi diagonalisable.

b) - On suppose maintenant que E est de dimension $n = 2$ sur $\mathbb{R}$ et que g est défini, dans la base canonique, par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que g est diagonalisable en cherchant les valeurs propres de g.

On choisit comme base de $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ les endomorphismes f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , de matrices respectives.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Les matrices respectives des endomorphismes $\varphi_g(f_i) = gof_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$ sont les matrices M_i .

Expliciter les matrices M_i et exprimer $\varphi_g(f_i)$ dans la base (f_i) , $1 \leqslant i \leqslant 4$

En déduire la matrice de l'endomorphisme φ_g dans la base (f_i) , $1 \leqslant i \leqslant 4$

Calculer les valeurs propres de φ_g et vérifier que φ_g est diagonalisable en cherchant les sous-espaces propres de φ_g .

»»»»»»»»»»«««««««««««

ECS 1984